

Trilha Alfabetização e Letramento Matemático

Processos operatórios: multiplicação e divisão



- ✓ **Construindo o processo multiplicativo**
- ✓ **Relações entre multiplicação e divisão**
- ✓ **Divisão por estimativa e pelo algoritmo convencional**

“

Os números governam o mundo.

Platão

”



5. Processos operatórios - Multiplicação e Divisão

Olá, professores e professoras! Sejam bem-vindos a mais um fascículo da trilha formativa *Alfabetização e Letramento Matemático para os Anos Iniciais*. Nosso objeto de estudo neste momento será a compreensão dos alunos sobre os processos operatórios de Multiplicação e Divisão. Sabemos que estratégias lúdicas são interessantes para atrair os estudantes, mas podemos ir além disso e pensar em aplicações com uma verdadeira intencionalidade pedagógica, para que as ideias de multiplicação e divisão possam ser exploradas de maneira significativa.

Com o auxílio do *Piquenique*, teremos a oportunidade de compreender como isso é possível, seja em situações específicas de jogo ou em problematizações propostas por você, professor. Essa também será uma oportunidade para que todos nós possamos entender o que por vezes ficou distorcido ou complexo em nosso próprio processo escolar. Vamos aos estudos!

5.1. Como está previsto esse trabalho na BNCC?



(...) a BNCC orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização.

(Base Nacional Comum Curricular, 2018)



Como o próprio trecho destacado acima nos mostra, os conceitos matemáticos pressupõem uma compreensão, para além dos procedimentos mecânicos que muitos de nós vivemos ao longo do processo escolar no período da Educação Básica (ou até mesmo no Ensino Superior, infelizmente). É exatamente por esse motivo que nós faremos dois apontamentos importantes aqui:

- 1) a implementação gradativa das ideias e experimentações sobre o processo operatório, visando uma compreensão consolidada dos conceitos que envolvem as operações de multiplicação e divisão;
- 2) o uso dos jogos enquanto recursos importantes para fomentar essa compreensão.

Ainda no 2º ano do Ensino Fundamental, a BNCC apresenta duas habilidades que se relacionam com a operação de multiplicação. Isso não significa que estamos exigindo dos estudantes uma compreensão e aplicação do algoritmo convencional da multiplicação neste ano-série. Pelo contrário: espera-se que sejam construídas estratégias de multiplicação que possam futuramente se relacionar e dar sentido ao processo operatório sistematizado.

(EF02MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável.

(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.

Note que não são todas as multiplicações apontadas na habilidade EF02MA07, tendo em vista essa construção da compreensão da ideia de adição de parcelas iguais em diferentes contextos. Vamos ao *Piquenique* e ao início de sua organização:

Temos 3 jogadores na partida e o banco precisa entregar A\$ 10,00 para cada um de início. Quantas *Américas* serão distribuídas pelo banco?

A operação envolvida aqui é a multiplicação $3 \times 10 = 30$. A exploração das diferentes situações de jogo permite, inclusive, um avanço sobre as multiplicações, relacionando com outra operação: 6×10 , sempre partindo de problematizações:

Se dobramos o número de jogadores, o que acontece com a quantidade de *Américas* usadas inicialmente para a partida?

Perceba que, por mais que a habilidade EF02MA07 não trate de multiplicações por 6, a habilidade EF02MA08 propõe uma exploração entre as relações de dobro e metade, triplo e terça parte com material manipulável, o que é “um prato cheio” para usar o *Piquenique* e as moedas de *Américas* disponíveis, além dos valores das cartas produto (fique tranquilo, pois veremos sugestões mais para a frente).



A partir do 3º ano, o processo de multiplicação ganha reforços com habilidades que expandem o leque de multiplicações e inserem mais uma ideia desta operação como contexto de trabalho: a configuração retangular (ou disposição retangular). A compreensão da operação de divisão também se amplia com a indicação do trabalho com as duas ideias desta operação (repartir e medir). A relação entre as operações de multiplicação e divisão se intensifica também no contexto da proporcionalidade, com a associação entre os quocientes de uma divisão com resto zero de números naturais por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte. Voltemos ao jogo *Piquenique*:

Com 5 jogadores, ao iniciarmos a partida, cada jogador receberá a quinta parte do que foi distribuído.



(EF03MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros.

(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais.

(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.

As habilidades propostas pela *BNCC* seguem aprofundando os conhecimentos sobre estas duas operações no 4º ano, discutindo mais especificamente a ideia de proporcionalidade na multiplicação. Vale lembrar que esse conceito já poderia ter sido aprofundado nas discussões sobre os valores do jogo *Piquenique*, quando tratamos da distribuição das A\$ 10,00 por jogador. Podemos ir além, inclusive, discutindo sobre a quantidade de cartas e sobre os valores de cada uma delas. Contudo, é importante destacar que esse movimento de aprofundamento segue o que a *BNCC* já prevê desde o início, que é um trabalho de retomada e aprofundamento dos conceitos desde o 1º ano do Ensino Fundamental.

(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

(EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

A partir do 5º ano, as habilidades indicadas pela *BNCC* vão expandir o processo operatório de multiplicação e divisão para o campo dos números racionais, principalmente na forma decimal, deixando a compreensão destas operações com frações para os estudantes desenvolverem no 6º ano do Ensino Fundamental. É também no 5º ano em que os debates sobre as diferentes combinações passam a ser possíveis, por meio de diagramas de árvores ou com o uso de tabelas. No jogo *Piquenique* temos isso evidenciado quando pensamos em quais combinações são possíveis de serem formadas a partir dos produtos disponíveis para compra no jogo.

(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Falaremos um pouco mais sobre as estratégias de cálculo e o quanto elas são desenvolvidas gradativamente no próximo ponto, mas já ficou perceptível como a *BNCC* promove uma apropriação gradativa do processo operatório e das ideias das operações de multiplicação e divisão. Por isso, é importante que você, professor, possa também fazer essa implementação com cautela.



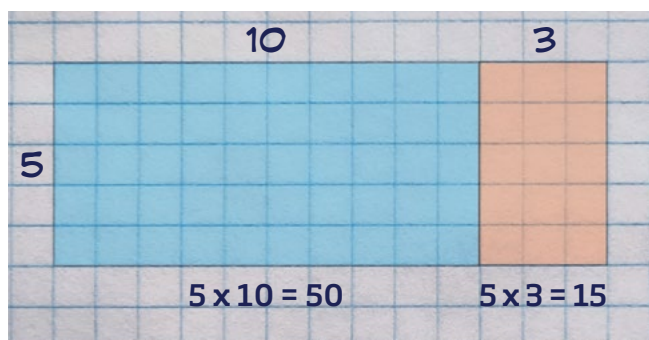
5.2. Multiplicar para além do algoritmo

A primeira questão a ser destacada sobre a operação de multiplicação é a de que os estudantes precisam compreender o que realmente é o ato de multiplicar. Desse modo, o mais compreensível acaba por ser o trabalho com a ideia de adição de parcelas iguais. Por exemplo, 3×4 corresponde ao que se lê: “três vezes o quatro”; o que resultaria na adição de três números 4:

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

Isso pode ser feito com o uso de objetos, o que permite claramente o trabalho com as moedas do jogo *Piquenique* como suporte, ou ainda as cartas produto, dependendo da problematização pretendida pelo professor. O que vai ficando claro conforme o trabalho com a multiplicação avança é que as propriedades da operação serão compreendidas a partir da experimentação de diferentes estratégias de cálculo. Assim, é fundamental que os estudantes consigam ter a oportunidade de usar técnicas e organizações variadas, analisarem regularidades e relacionarem operações de multiplicação a partir dos conceitos apontados anteriormente nas habilidades da *BNCC*.

Vamos imaginar a multiplicação 13×5 por uma perspectiva geométrica, a partir de uma malha quadriculada. Para isso, é importante que os estudantes consigam perceber a decomposição presente no sistema de numeração decimal. Observe como isso pode ser desenhado e como a compreensão sobre a multiplicação muda com uma referência visual da decomposição do número 13 em $10 + 3$, e do impacto dessa decomposição no processo operatório:



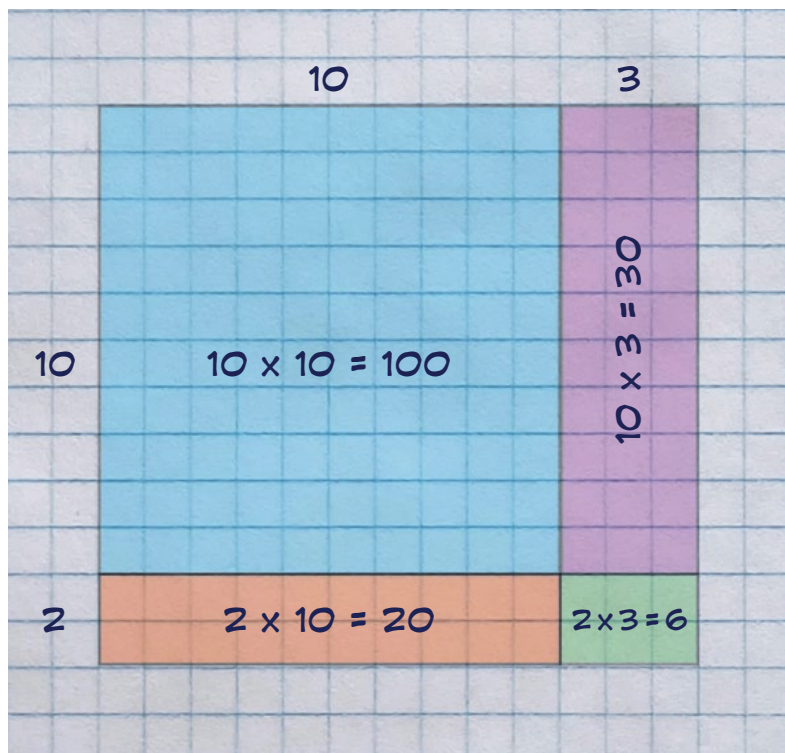
$$5 \times 13 = 5 \times (10 + 3) = 5 \times 10 + 5 \times 3 = 50 + 15 = 65$$

Fazendo um paralelo com o algoritmo da multiplicação, a estratégia de cálculo é exatamente a mesma. Primeiro apresentamos a multiplicação deixando evidente a decomposição para, só depois, partir para o algoritmo convencional, dando sentido ao processo que está sendo feito pelo estudante.

$$\begin{array}{r} 10 + 3 \\ \times \quad 5 \\ \hline 15 \\ + 50 \\ \hline 65 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 13 \\ \times \quad 5 \\ \hline 65 \end{array}$$



Para uma multiplicação entre dois números com dois algarismos cada, podemos seguir o mesmo caminho: uma representação geométrica para uma visualização, paralelamente a uma organização por decomposição, para que, posteriormente, seja possível fazer a transição para o algoritmo convencional. Isso dá sentido aos procedimentos que pareciam mecanizados quando estudamos na escola. Vamos usar 12×13 como exemplo para observar a organização geométrica, com o auxílio da malha quadriculada.



$$\begin{array}{r}
 100 \\
 30 \\
 20 \\
 + \quad 6 \\
 \hline
 156
 \end{array}$$

As adições das quantidades de quadradinhos dos retângulos formados nos trarão o resultado da operação. Isso também poderá ser percebido no algoritmo convencional, quando essa transição acontecer.



$$\begin{array}{r}
 13 \\
 \times 12 \\
 \hline
 26 \rightarrow 2 \times 13 \\
 + 130 \rightarrow 10 \times 13 \\
 \hline
 156
 \end{array}$$

Você pode já ter se deparado com outros métodos e técnicas operatórias por aí, das mais simples às mais complexas: por cruzamento de retas, método egípcio entre outros. O mais importante é dar significado para além do processo prático que estas técnicas propõem. Se o estudante compreendeu qual a relação entre o método e o sistema de numeração decimal, ele conseguirá compreender melhor como aquela técnica funciona e usar com propriedade o que é proposto.

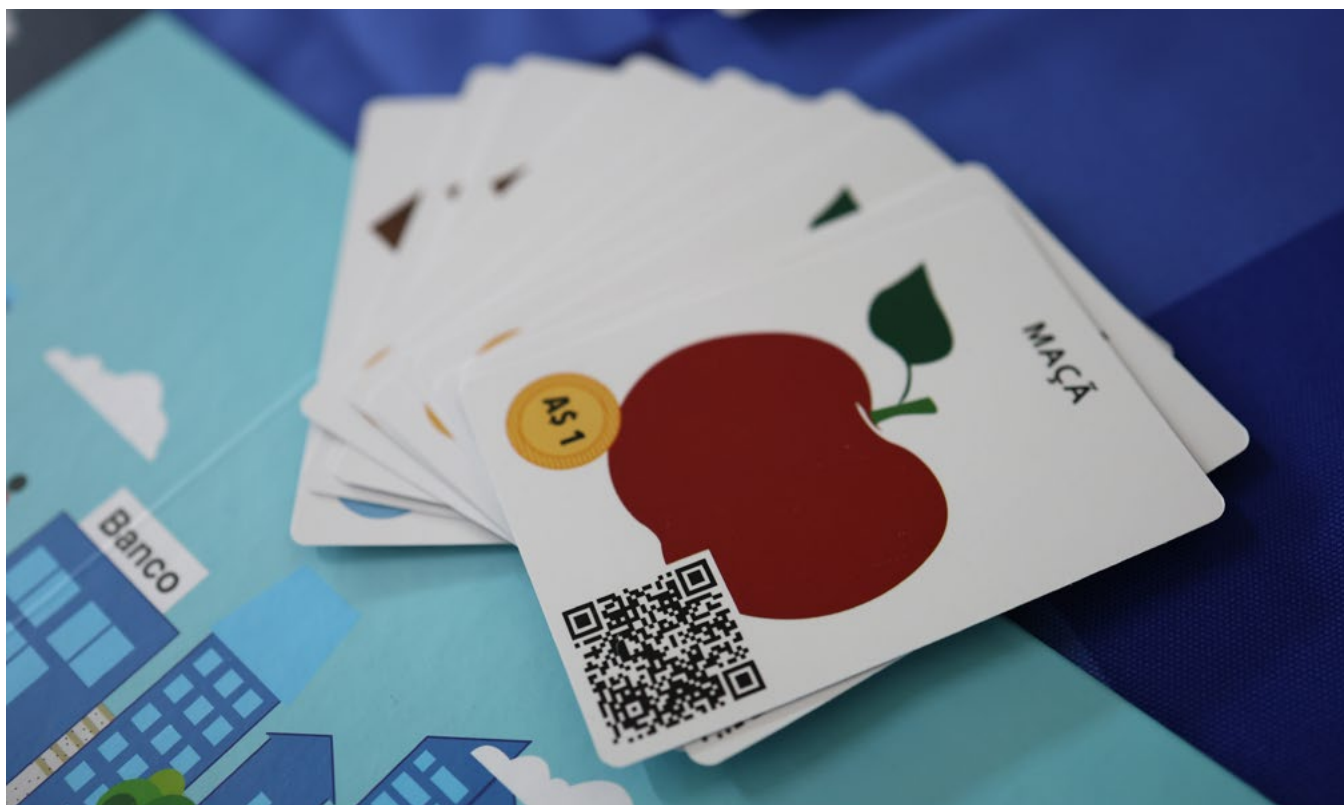
5.3. Divisão: da estimativa ao algoritmo convencional

Assim como na multiplicação, a divisão possui mais de uma ideia, ou seja, o contexto impacta na compreensão do processo operatório. A primeira sugestão que trazemos é a de partir sempre de contextos que apresentam a divisão com a ideia de repartir, para garantir estratégias de distribuição inicialmente, dando sentido ao processo operatório. Os estudantes já trabalham com a noção de divisão em partes iguais desde a Educação Infantil, mas é a partir do 3º ano do Ensino Fundamental que esse conceito ganha as primeiras características de processo operatório. Vamos usar um exemplo a partir do jogo *Piquenique*:

Se distribuírmos igualmente as 24 cartas-produto para 4 pessoas, quantas cartas receberá cada um?

Mesmo sem uma orientação prévia, é bem provável que a criança responsável por fazer essa divisão entregue uma carta para cada jogador até que elas acabem. Esse movimento é exatamente o de quem está trabalhando por estimativa ao realizar uma operação de divisão, mostrando que o algoritmo convencional, apesar de prático, não é o primeiro raciocínio da criança. Vamos organizar como essa distribuição ficaria organizada em uma estratégia de estimativa.

$$\begin{array}{r} 24 \\ - 4 \\ \hline 20 \\ - 4 \\ \hline 16 \\ - 4 \\ \hline 12 \\ - 4 \\ \hline 8 \\ - 4 \\ \hline 4 \\ - 4 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ + 1 \\ \hline 6 \end{array}$$



Por mais que a criança perceba que entregar duas cartas para cada um agilizaria a distribuição, o raciocínio funcionaria da mesma maneira.

$$\begin{array}{r}
 24 \quad | \quad 4 \\
 - 4 \\
 \hline
 20 \\
 - 8 \\
 \hline
 12 \quad + 1 \\
 - 8 \\
 \hline
 4 \\
 - 4 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Quanto melhor a estimativa (e isso precisa ser praticado e experimentado pelo estudante), mais próximo da compreensão do algoritmo convencional estará a criança. Desse modo, o raciocínio proporcional interfere nessa construção e, exatamente por isso, sua construção é gradativa e assim está proposta na *BNCC*.

Sugerimos que você possa propor outras alternativas a partir da divisão usando o material dourado, recurso estruturado para o trabalho com o nosso sistema de numeração, oportunizando uma compreensão de como as características do sistema de numeração podem ser identificadas no processo de divisão. Use divisões exatas e não exatas para que as crianças identifiquem a importância do resto em diferentes contextos.

[Clique aqui](#) para assistir a um vídeo que provoca esse tipo de reflexão e poderá ser usado em sala de aula.

Conforme as crianças forem desenvolvendo a compreensão do processo operatório, o algoritmo convencional pode ser introduzido como uma ferramenta para agilizar o cálculo, desde que sua construção seja feita de maneira que os estudantes compreendam o significado de cada passo.

[Clique aqui](#) para ver como estes passos são apresentados novamente com o uso do material dourado!

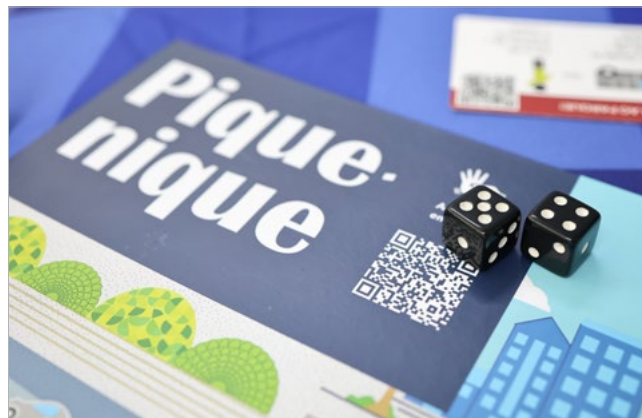
É fundamental que a indicação das ordens (centena, dezena, unidade) seja feita enquanto o estudante estiver construindo esse processo de compreensão do que é cada ação dentro do algoritmo convencional. Com essa compreensão consolidada, não serão mais necessários tais registros e o estudante poderá realizar os cálculos diretos no algoritmo. Observe o exemplo a seguir:

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{48} \quad | \quad 4 \\
 - 4 \\
 \hline
 08 \\
 - 8 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Esse cálculo pode ser ainda mais curto quando ocultadas as operações de subtração, mas isso não classifica o estudante em alguém que sabe fazer divisão ou não. Isso só demonstra que ele não necessita do registro de todas as etapas, trazendo para o cálculo mental as operações de multiplicação e subtração que compõem o algoritmo. Quando as crianças estiverem trabalhando com os números racionais na forma decimal, um novo campo numérico, a sinalização das ordens no algoritmo da divisão precisa retornar para que todos compreendam o que significa a vírgula na organização dos números e como devemos trabalhar com ela no processo operatório.

Esperamos que os tópicos apresentados neste minicurso proporcionem novas reflexões sobre as operações de multiplicação e divisão e sobre como podemos explorar o trabalho sobre elas em sala de aula. Quanto mais refletimos e experimentamos novos caminhos, melhoramos nossa prática e atingimos de maneira efetiva os objetivos de ensino almejados!

Até breve!



Referências bibliográficas

BOALER, Jo. *Mentalidades matemáticas*. Tradução de Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2018.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Blucher 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base>. Acesso em: 23 jun. 2023.

COLL, César; TEBEROSKY, Ana. *Aprendendo Matemática: conteúdos essenciais para o Ensino Fundamental de 1ª a 4ª série*. São Paulo: Ática, 2006.

EVES, Howard. *Introdução a História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

HUMPHREYS, Cathy; PARKER, Ruth (autor). *Conversas numéricas: estratégias de cálculo mental para uma compreensão profunda da matemática*. Porto Alegre: Grupo A, 2019.

KAMII, Constance; DECLARK, Georgia. *Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget*. Campinas: Papyrus, 1994.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Trad. Heitor L. de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PANIZZA, Mabel (org.). *Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas séries iniciais: análise e propostas*. Tradução: Antonio Feltrin. Porto Alegre: Artmed, 2006.

VAN DE WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. Porto Alegre: Artmed, 2009.



Conteúdo protegido - Proibida a reprodução sem créditos ao Instituto Brasil Solidário
para fotos ou contextos de projetos apresentados



Instituto
**BRASIL
SOLIDÁRIO**

INSTITUTO BRASIL SOLIDÁRIO - IBS
www.brasilsolidario.org.br